BrainOnTube
Conocimiento al Alcance de Todos

Diferenciación

v. 1.0.0

Mg. Fausto Mauricio Lagos Suárez

29 de abril de 2017

Contenido

¿Qué es la derivada?
Interpretación Física

Límites y continuidad

Diferencialidad implica continuidad

¿Qué es la derivada?

Interpretación física

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Cambio promedio

$$\frac{dy}{dx}$$

Cambio instantáneo

Cambio instantáneo

Ejemplo 1: Velocidad de obturación

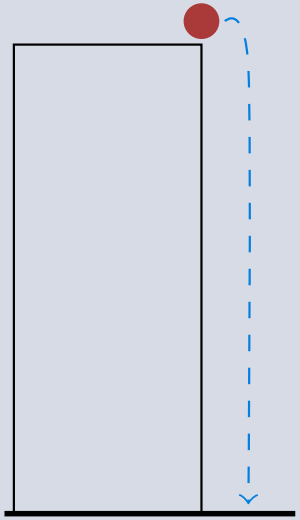
(a) Canon EOS REBEL T2i - 8s

(b) Canon EOS 350D Digital - 1/200s

a. Nature's Stairwell, Ropes in The Water - CC-By-2.0
b. water drop, J. FROG - CC-By-2.0

Velocidad

Ejemplo 2: Velocidad promedio y velocidad instantánea



La altura de un objeto (calabaza) que cae desde una altura de 80 mts esta descrita por la función

$$h(t) = 80 - 5t^2$$

de tal forma que su velocidad promedio durante la caída es $v = -20\frac{m}{s}$, sin embargo su velocidad en el instante en que toca el suelo es

$$\frac{d}{dt}h(4) = -40\frac{m}{s}$$

Límites *"fáciles"* (*Inmediatos*)

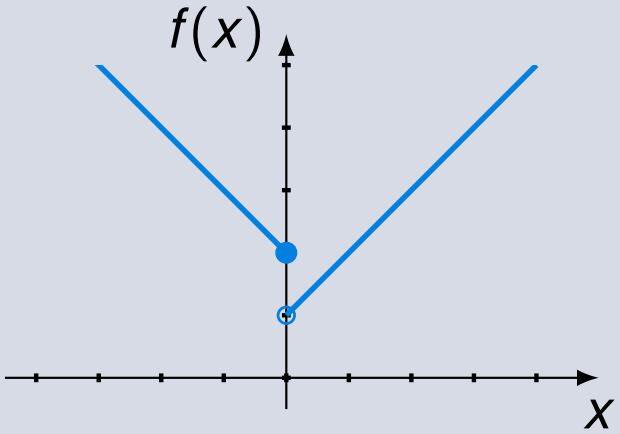
$$\lim_{x\to 2} \frac{2x-3}{4} = \frac{1}{4}$$

Límites *"complicados"*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{2x^3+5x^2-2x-5}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)(2x+5)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x\to 1} 2x+5 \\ &= 7\end{aligned}$$

todos los límites que incluyen ambiguedades de la forma $\frac{0}{0}$ pueden considerarse *"complicados"*, dentro de estos están las derivadas.

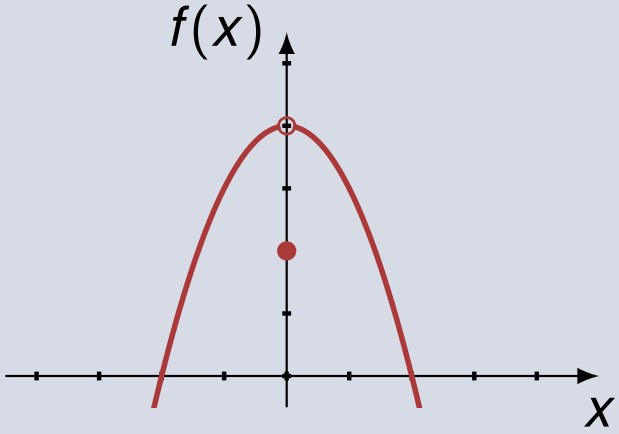
$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2 - x = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + 1 = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 4 - x^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 4 - x^2 = 4$$

¿Qué significa que una función f sea continua en $x = x_0$?

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \text{existe}$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

2. $f(x_0) = \text{existe}$
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Un importante resultado

Diferencialidad implica continuidad

Teorema: Si f es diferenciable en $x = x_0$ entonces f es continua en $x = x_0$

Demostración.

A partir de la definición de derivada en un punto

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \tag{1}$$

tomando

$$x_0 + \Delta x = x, \tag{2}$$

y por la definición de continuidad en un punto, se tiene

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = 0. \tag{3}$$

□

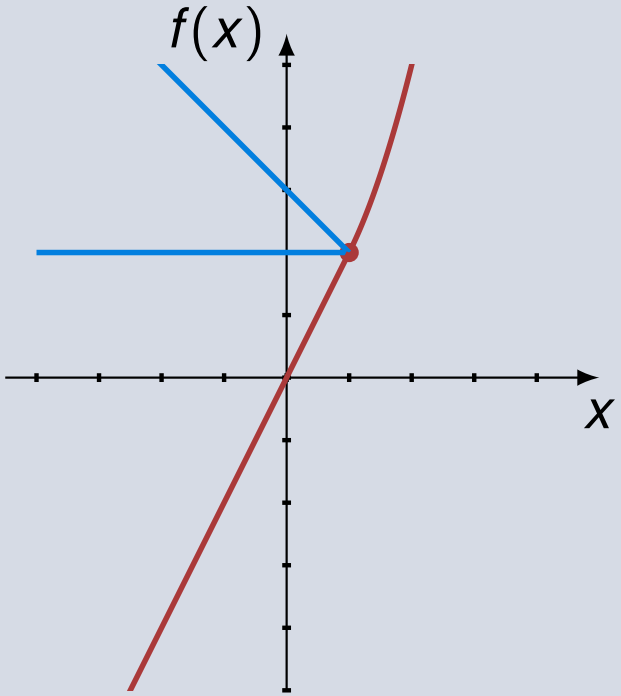
Continua vs diferenciable

Ejemplo 3

¿Para qué valores de a y b la siguiente función es...

1. Continua?
2. Diferenciable?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 1 \\ ax + b, & x \leq 1 \end{cases}$$



1. $f(1) = 2$
2. $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x)$

Esta presentación esta basada en: David Jerison. *18.01SC Single Variable Calculus.* Fall 2010. Massachusetts Instituite of Technology: MIT OpenCourseWare, `https://ocw.mit.edu`. License: Gracias!!!